

Introductie

De leerlingen komen netjes op tijd binnen. De tafels staan klaar in groepsopstelling met ieder een genummerde envelop in het midden. De verdeling van de leerlingen over de groepjes staat op het bord geprojecteerd, zodat ze direct netjes op hun plek kunnen gaan zitten.

Ik observeer een groepje van twee meisjes (er zouden er drie zijn, maar eentje was afwezig): leerling A en B.

Docent benoemt dat er een paar mensen komen kijken naar de les, die afkomstig zijn van de UT en andere scholen. Hij introduceert vervolgens het onderwerp: slim tellen. Hij geeft een voorbeeld van het slim tellen van leerlingen door de lege tafels te tellen (complementair) of door het aantal groepjes te vermenigvuldigen met het aantal leerlingen per groepje. Vervolgens verwijst hij naar de enveloppen op de tafels: hierin zitten genummerde kaartjes. Hij legt het doel uit: kies er drie en maak de opdrachten die daarop staan.

Observatie van deel 1

Mijn leerlingen openen meteen de envelop en gaan op onderzoek uit. A: “Hmm, veel zeg”. B: “Hoeveel kaartjes zijn het dan?” A: “13”. Leerling B wijst op kaart 1 en zegt: “die is wel makkelijk: 4 mensen, gewoon 4×4 dus” (*het is een permutatie van 4 uit 4; het correcte antwoord is dus niet 16, maar $4! = 24$*). Leerling A leest ‘m vervolgens ook. Ondertussen kijkt B een beetje rond. A: “Dit is net zoiets als deze”, en pakt kaartje 4 erbij (*dit is echter geen vergelijkbare opgave, aangezien hier wel herhaling mogelijk is; het correcte antwoord is $3^4 = 81$*). A: “Dat is allemaal dezelfde opgave volgens mij”. Leerling B beaamt dit (zonder hier zichtbaar over na te denken). B pakt vervolgens kaartje 13 en zegt “is dit niet gewoon 3×4 ?” (*dit betreft een permutatie van 3 uit 4, dus $4 \times 3 \times 2 = 24$ mogelijkheden*). Harde conclusies vallen er nog niet. Ze lezen allebei nog een aantal kaartjes, en lijken hier geconcentreerd mee bezig. Ze bekijken bijna alle kaartjes. A: “Het maakt mij niet echt uit welke we nemen.”

Docent noemt nog een keer dat er 3 kaartjes gekozen moeten worden, en dat men 15 minuten de tijd heeft voor dit onderdeel: even hard werken dus!

Mijn leerlingen beginnen vervolgens met het oplossen van de eerste opgave: kaartje 5 (*een permutatie van 3 uit 3, dus $3! = 6$ volgorde*). Dit lijkt uiteindelijk redelijk willekeurig gekozen, en ook na weinig tot geen overleg. A vraagt aan B: “Moet je zo kort mogelijk doen?” B: “Ik weet niet wat je op moet schrijven”. Vervolgens gaat A maar gewoon alle mogelijkheden uitschrijven en zegt erbij “zo ben je wel lang bezig”. Ze hebben alle 6 oplossingen gevonden, maar ze niet zo systematisch opgeschreven:

247
472
274
427
724
742

Na vervolgens even een minuutje “uitgerust” te hebben zegt B: “welke gaan we nu doen?” Vervolgens pakt ze kaartje 1 (*permutatie van 4 uit 4*). A zegt: “gewoon alle volgordes van ABCD!” B gaat deze plichtsgetroouw uitschrijven. A leest ondertussen een aantal andere kaartjes nog een keer. Het groepje naast mij roept “Gewoon 6 mogelijkheden, $3 \times 2 \times 1!$ ” Mijn leerlingen gaan stug door met het uitschrijven van alle mogelijkheden en lijken deze opmerking dus niet te horen (of in ieder geval niet te koppelen aan hun bezigheid).

Na een tijde stagneert het uitschrijven en vraag ik: “hoeveel heb je er nu?” B: “17”. Ik vraag of dit ze allemaal zijn, en B zegt direct “nee” (*inderdaad, het zouden er 24 moeten zijn*). Blijkbaar is in ieder geval wel duidelijk geworden dat dit geen feilloze methode is. Net als A heeft inderdaad ook B de volgordes niet systematisch uitgeschreven. A kijkt mee, wijst en zegt: “die heb je dubbel!” B: “ja, ik kwam er ook al achter dat ik die al had”. De vaart lijkt er nu een beetje uit. Er wordt even naar het buurgroepje gekeken. “Hmm, zij schrijven ook wel veel uit”.

A begint aan kaartje 2 (*een permutatie met dubbelen*), zonder enig overleg. Ze gaat weer alle volgordes uitschrijven, en wederom niet echt gestructureerd. B kijkt wat om zich heen, bekijkt vervolgens kaartje 8 (*een combinatie van 3 uit 5*) en gaat maar weer wat uitschrijven. Er is geen overleg, en echt tempo zit er niet in. Al snel lijken ze het zat en staren ze een beetje voor zich uit. Er worden geen pogingen ondernomen om iets slims te doen, of om elkaar of zichzelf van de correctheid van hun werk te overtuigen (daar lijken ze ook absoluut niet zeker van).

A leest kaartje 9 (*permutatie van 3 uit 5*). Er wordt weer wat gestaard, en vervolgens gekletst over niet-schoolgerelateerde zaken. A pakt ondertussen kaartje 3 op (*combinatie van 3 uit 4*), terwijl B verdergaat met staren. A probeert nog contact te maken: “Wat is dit dan?” B heeft geen zin meer: “Nah, ik weet het niet meer”. A: “Hmm, dit is wel veel opschrijven”. Vervolgens pakt A kaartje 7 (*combinatie van 2 uit 4*). Op dat moment komt de docent langs: “Hoe gaat het?” Leerlingen geven aan dat het lastig is. “We schrijven alles uit, maar het kan vast slimmer”. A pakt daarna kaartje 4 (*met $3^4 = 81$ mogelijkheden*). “Hmm, deze zou echt veel schrijfwerk zijn.”

Instructie

Docent deelt A1-papieren uit en legt uit: iedereen heeft nu een blaadje gekregen, en een stift. “We gaan nu een heel andere opdracht doen. Zoals we hebben gezien lijken de opgaven wel een beetje op elkaar. Pak daarom nu het vel, schrijft je groepsnummer erop. Dan ga je de kaartjes indelen in groepen en dat schrijf je op het A1. Schrijf er goed leesbaar bij waarom je ze zo hebt ingedeeld.”

Observatie van deel 2

Mijn leerlingen pakken direct enthousiast de kaartjes erbij. A pakt kaartje 5 (*permutatie van 3 uit 3*): “Dit is gewoon een volgorde. Op hoeveel manieren kunnen ze dat doen?” A pakt kaartje 1 (*een permutatie van 4 uit 4*): “Dit is ook een volgorde” en legt ‘m bij kaartje 5 (*dit is dus inderdaad een correcte groepering*). Dan kaartje 2 (*een permutatie met dubbelen*), “ook volgorde”, en vervolgens ook erbij. Dan pakt ze kaartje 8 (*combinatie van 3 uit 5*): “hier heeft hij er maar 3 nodig, dus die moet apart”. Nu zijn ze druk aan het lezen. Apart de kaartjes bekijken, en vervolgens overleggen. A komt met kaartje 6 (*met 2^4 mogelijkheden*) aanzetten en wil die ook bij de eerste stapel leggen. B: “Ja, maar die heeft wel een bovenkamer en een onderkamer.” Deze kaart wordt daarom nog even apart gehouden.

B legt kaart 9 (*permutatie van 3 uit 5*) bij de eerste stapel: “dit is weer net als 1”. A pakt vervolgens kaart 4 (*3⁴ mogelijkheden*). B: “die hoort bij dit, omdat ie drie auto’s moet...”. A: “Ja maar, eh... Hmm, is wel veel uitschrijven”.

Vervolgens wordt er ineens op het vel geschreven, terwijl volgens mij nog volstrekt onduidelijk is welke kaartjes nu bij elkaar horen en waarom. Toch wordt hevig geschreven, waarbij niet meer wordt gekeken naar de uitwerkingen die ze aan het begin van de les gemaakt hadden.

A noteert, terwijl B grotendeels dicteert:

“6, 7, 3 en 13: niet alleen op volgorde, je moet meerdere dingen rekening houden”
(*macht, combinatie, combinatie, permutatie*)

“4, 11, 8, 9, 5, 2, 1, 12, 10: op volgorde zetten”
(*macht, macht, combinatie, permutatie, permutatie, permutatie met dubbelen, permutatie, permutatie met dubbelen, combinatie*)

(*Mijn conclusie: dit is niet veel beter dan volstrekt willekeurig groeperen*)

B zegt over de eerste groep: “het gaat hier niet alleen om de volgorde, je moet ook kijken bij wie je ze kan zetten”. Over de tweede groep zegt ze: “misschien kan er nog bij ‘en verschillende combinaties bedenken’”. A noteert vervolgens “verschillende combinaties maken”.

Ze controleren of alle kaartjes nu in precies 1 van de 2 groepen zitten. Dat bleek het geval, dus vinden ze dat ze klaar zijn. Nu gaan ze weer verder met voor zich uit staren.

De docent komt langs en zegt “zo, dat hebben jullie snel gedaan”. Hij vraagt om uitleg over de toelichting op de categorisatie: “ik snap niet helemaal wat je hiermee bedoelt”. De leerlingen leggen uit dat “dingen rekening houden” betekent dat je bijvoorbeeld ook tussen mensen moet verdelen, en dat het niet alleen maar op volgorde zetten is. De docent laat ze opnieuw nadenken: klopt het echt zo?

Leerlingen pakken de kaartjes er weer bij. A heeft ze vast en gaat er doorheen, terwijl B meeleeft. Ze houden al snel weer op en gaan verder met rondkijken door het lokaal. Na een minuutje pakken ze de kaartjes er weer bij. A leest, B doet niks. Geen actie, geen overleg. Vervolgens kletsen over ongerelateerde zaken.

Na een paar minuten vraagt A aan het groepje naast ons: wat hebben jullie dan? Geen reactie, dus maar weer verder met kletsen. Op het laatst zegt ze “iedereen heeft wat anders, haha”. Ze lijkt wat onzeker/verlegen.

Al met al is de categorisatie niet zo duidelijk; wat nou precies het verschil is tussen de twee groepen kan niet goed verwoord worden. Er is niet veel gediscussieerd, en er is niet meer gekeken naar de eerdere uitwerkingen. Ook is geen aanstalten gemaakt tot slimme teltechnieken.